Résumé 15 : Espaces préhilbertiens

Dans tout ce cours E sera un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Espaces Préhilbertiens

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, que l'on note généralement $< .,. >$.
Ici, "positive" signifie que pour tout $x \in E, < x, x > \geqslant 0$ et "définie" signifie que pour tout $x \in E$, si $< x, x >= 0$, alors $x = 0_E$.
On dit que $\left(E, < .,. > \right)$ est **un espace préhilbertien**. S'il est de plus de dimension finie, il est dit **euclidien.**

Puisque la forme bilinéaire est positive, on peut poser

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >},$$

que l'on appelle **norme euclidienne (ou hilbertienne) de** x, associée au produit scalaire $< .,. >$. Elle vérifie pour tous $x, y \in E$:

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad \textbf{Identité de polarisation}$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \quad \textbf{Identité d' Al-Kachi.}$$

La première de ces deux égalités prouve qu'il y a une bijection entre les normes euclidiennes et les produits scalaires.

Inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski

Soient x et y deux vecteurs de E. Alors, $\boxed{\left| < x, y > \right| \leqslant \|x\| \times \|y\|}$. De plus, on a l'équivalence entre l'egalité $\left| < x, y > \right| = \|x\| \times \|y\|$ la colinéarité entre x et y. Le signe de $< x, y >$ est alors égal au signe du coefficient de colinéarité.

Inégalité de Minkowski

Soient x et y deux vecteurs de E. On a l'égalité :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.

Le théorème de représentation de Riesz :

Si E est un espace euclidien, pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E, \varphi(x) =< x_0, x >$.

Exemples :

- ▷ Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

$$\varphi : (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

- ▷ Le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\varphi : (M, N) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mapsto \text{Trace}\left({}^tMN\right).$$

On remarque que ce produit scalaire est le p.s. défini ci-dessus lorsque l'on identifie l'espace des matrices à l'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^{np}$, i.e

$$\text{Trace}\left({}^tMN\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} n_{i,j}.$$

En utilisant les propriétés de la trace, on peut prouver que **toute matrice symétrique est orthogonale aux matrices antisymétriques.**

- ► Soit $E = \mathscr{L}^2(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables sur l'intervalle I à valeurs réelles. L'application

$$\varphi : (f, g) \in E \times E \mapsto \int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

est un produit scalaire sur E.

- ► L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites réelles telles que $\sum_{n \geqslant 0} u_n^2$ est convergente est muni d'un produit scalaire : $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$

II Orthogonalité

Ici, E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

§ 1. ***Entre vecteurs.–*** Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux** lorsque $< x, y >= 0$, et x est dit **unitaire** ou **normé** lorsque $\|x\| = 1$, ce qui est le cas de $y/\|y\|$ pour tout $y \in E$ non nul.

Une **famille de vecteurs est orthogonale** lorsque ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, et elle est **orthonormale** lorsqu'elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont unitaires.

Proposition II.1

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, donc en particulier une famille orthonormale.

De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est orthogonale, alors le théorème de Pythagore s'applique : $\left\|\sum_{i=1}^{p} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|e_i\|^2$.

§ 2. ***Entre sous-espaces vectoriels .–*** Soit Ω une partie non vide de E. On définit

$$\Omega^\perp = \{x \in E \text{ tels que pour tout } \omega \in \Omega, < x, \omega >= 0\}\,.$$

$\Omega^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

On a $\Omega \subset \left(\Omega^\perp\right)^\perp$, mais l'autre inclusion n'est pas toujours vérifiée en dimension infinie. De plus, si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **orthogonaux entre eux** lorsque l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

$$F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp \iff \forall (a,b) \in F \times G, < a, b >= 0.$$

III Bases orthonormées

La première remarque importante est qu'elles existent toujours :

Théorème III.1

Tout espace euclidien possède une base orthonormée (en fait, il en possède une infinité dès qu'il est de dimension au moins 2).

L'intérêt des bases orthonormées provient du fait que dans celles-ci, les composantes, les normes, les matrices d'endomorphismes se calculent aisément, comme l'expliquent les égalités suivantes :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Pour tout vecteur x de E, $x = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$.
2. Soient $x, y \in E$. Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Alors :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Autrement dit, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} < e_1, x > \\ < e_2, x > \\ \vdots \\ < e_n, x > \end{pmatrix}$.

On en déduit une interprétation matricielle très pratique :

1. Soient $x, y \in E$ et $X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y \in \text{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \in \mathbb{R}^n$ les vecteur des composantes de x et y dans $\mathscr{B}$. Alors

$$< x, y >= {}^t XY.$$

2. Soit f un endomorphisme de E. Notons $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sa matrice dans $\mathscr{B}$. Alors

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad m_{i,j} =< e_i, f(e_j) > .$$

IV Projections Orthogonales

E est toujours un préhilbertien réel.

§ 1. ***Supplémentaires orthogonaux.–*** Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F admet **un supplémentaire orthogonal** lorsqu'il existe un sous-espace vectoriel G de E qui est à la fois supplémentaire de F et orthogonal à F [1]. On montre que s'il existe, ce sous-espace vectoriel est $F^\perp$, si bien que les assertions "F admet un supplémentaire orthogonal" et "$F \oplus F^\perp = E$" sont équivalentes.

Attention : en dimension infinie, certains sous-espaces vectoriels n'admettent pas de supplémetaire orthogonal.

En revanche,

Théorème IV.1

Tout sous-espace vectoriel F de E de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal : $F \oplus F^\perp = E$.

§ 2. ***Projecteurs.–*** Parmi les projecteurs de E, certains se distinguent par le fait que leur noyau et leur image sont orthogonaux entre eux :

Définition IV.2

Soit F un sous-espace vectoriel tel que $F \oplus F^\perp = E$. On appelle projection orthogonale sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
Inversement, soit p un projecteur. Il est dit orthogonal lorsque pour tous $a \in \ker p$ et tout $y \in$ Im p, $x \perp y$.

Absolument indispensable pour tout calcul sur les projecteurs orthogonaux :

1. Avouez que la dénomination est bien trouvée !

Théorème IV.3

Dans le cas où F est de dimension finie, pour toute base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F, on a alors :

$$\forall x \in E, \qquad p(x) = \sum^{p} < e_k, x > e_k.$$

Remarques :

On a de jolies caractérisations des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs. Par exemple, si p est un projecteur de E (qu'on supposera de dimension finie), alors on a équivalence entre

1. $\ker \subset (\text{Im } p)^{\perp}$.
2. p est $1-$Lipschitzien.
3. p est auto-adjoint.

Théorème IV.4 (*Inégalité de Bessel*)

Pour toute famille orthonormée $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, et $\forall x \in E$,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} < x, e_i >^2 \leqslant \|x\|^2}.$$

Théorème IV.5 (*de la projection orthogonale*)

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^{\perp} = E$. Notons f la projection orthogonale sur F. Alors :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \|x - y\| \geqslant \|x - f(x)\|,$$

et il y a égalité si et seulement si $y = f(x)$.
Autrement dit, $d(x, F) = \|x - f(x)\|$.

§ 3. ***Symétries orthogonales.–*** Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^{\perp} = E$.
On appelle symétrie orthogonale s par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.

On appelle réflexion par rapport à l'hyperplan H la symétrie orthogonale par rapport à H.

Remarques :

La réflexion par rapport à $H = \left(\text{Vect}\,(x_0)\right)^{\perp}$, si x_0 est unitaire, admet pour expression

$$s \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - 2 < x, x_0 > x_0 \end{array} \right. .$$

§ 4. ***Suites totales.–*** On définit ici la notion de base hilbertienne, étendant la notion de BON.

Définition IV.6

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est une suite totale lorsque l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E, i.e lorsque pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots a_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{p} a_k e_k \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples :

(i) La famille des polynomes orthogonaux lorsque l'intervalle d'intégration est un compact.

(ii) La base canonique de ℓ^2.

Théorème IV.7

Si (e_n) est une suite orthonormale totale de vecteurs de E, et si pour tout n, on note p_n la projection orthogonale de E sur Vect $(e_1, \dots, e_n)$, alors pour tout $x \in E$, la suite de vecteurs $\left(p_n(x)\right)_n$ converge vers x.

V Orthonormalisation de Gramm-Schmitt

Nous présentons un procédé de construction de bases orthonormées à partir d'une base de E :

Soit E un espace préhilbertien et $\mathscr{E} = (e_1, ..., e_p)$ une famille **libre** de E. Alors il existe une unique famille $\mathscr{V} = (v_1, ...v_p)$ de vecteurs de E qui vérifie

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_p) \text{ est orthonormée,} \\ \forall k \in [\![1, p]\!], \quad \text{Vect } (e_1, ..., e_k) = \text{Vect } (v_1, ..., v_k), \\ \forall k \in [\![1, p]\!], \quad < e_k, v_k >> 0. \end{cases}$$

On appelle cette famille $\mathscr{V}$ **orthonormalisée de $\mathscr{E}$ par le procédé de Gram-Schmitt.**

Remarques :

Puisque $\mathscr{V}$ est orthonormale, la matrice de passage de la base $\mathscr{V}$ à la base $\mathscr{E}$ est

$$\begin{pmatrix} <e_1,v_1> & <e_1,v_1> & \dots & <e_p,v_1> \\ 0 & <e_2,v_2> & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & <e_p,v_p> \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \cap \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R}).$$

VI Le groupe orthogonal

§ 1. ***Endomorphismes orthogonaux.***— Ce sont ceux qui préservent les distances.

Définition VI.1

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est un endomorphisme orthogonal, ou une isométrie vectorielle lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad < f(x), f(y) >=< x, y > .$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.

Pour montrer qu'un endomorphisme est une isométrie, nous uiliserons plutôt :

Proposition VI.2

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$f \in \mathscr{O}(E) \Longleftrightarrow \forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

Exemples :

- Toute isométrie de E est ainsi injective (car $\|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$) et par conséquent bijective car E est de dimension finie.
- Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Id_E est le seul projecteur orthogonal qui soit une isométrie. Attention au fait qu'un projecteur orthogonal non trivial n'est PAS un endomorphisme orthogonal.

Plusieurs propriétés (injectivité, surjectivité) d'un endomorphisme f de E se lisent sur les propriétés de l'image d'une base de E par f (libre, génératrice). Il en est de même du caractère isométrique de f :

Proposition VI.3

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors on a l'équivalence entre les prédicats suivants :

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{O}(E) &\Longleftrightarrow \exists \text{ une BON } \mathscr{B} \text{ de } E \text{ dont l'image par } f \text{ est une BON de } E \\ &\Longleftrightarrow \forall \mathscr{B} \text{ BON de } E, \text{ l'image par } f \text{ de } \mathscr{B} \text{ est une BON de } E. \end{aligned}$$

Proposition VI.4 (*Le groupe orthogonal*)

L'ensemble $\mathscr{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal de E.

§ 2. ***Matrices orthogonales.***— Ici, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{R}^n$ sera toujours muni du produit scalaire canonique.

Définition VI.5

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. M est dite orthogonale lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

$$L_M \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right. \text{ est une isométrie de } \mathbb{R}^n.$$

On note $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Proposition VI.6

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalentes :

(i) $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

(ii) ${}^tMM = \mathrm{I}_n$

(iii) $M{}^tM = \mathrm{I}_n$

(iv) Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(v) Les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}_n$.

Remarques :

- En particulier, inverser une matrice orthogonale est très simple : il suffit de la transposer.
- Toute matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Proposition VI.7 (*Matrice de passage entre deux bases orthonormées*)

Soit $\mathscr{B}_0$ une **BON** *de E, et $\mathscr{B}_1$ une base de E. Alors*

$$\mathscr{B}_1 \text{ est une BON de } E \Longleftrightarrow \text{ la matrice de passage } P_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}_1} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}).$$

En particulier, la matrice de passage entre deux BON de E est une matrice orthogonale.

VII Géométrie Vectorielle euclidienne

Rappelons qu'un espace euclidien orienté de dimension n est un espace euclidien dont on a fixé une base de référence $\mathscr{B}_0$. Toute base $\mathscr{B}$ de E est ainsi orientée ; elle est dite directe si $\det P_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}} > 0$, et indirecte si $\det P_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}} < 0$.

En particulier, $\mathbb{R}^n$ est orienté par sa base canonique.

Proposition VII.1 (*Conservation de l'aire*)

Pour tout $\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\det \Omega = 1$ ou -1.
On note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) / \det \Omega = 1\}$.
C'est un sous-groupe de $(\mathscr{O}_n(\mathbb{R}), \circ)$ appelé groupe spécial orthogonal. Ses éléments sont parfois appelés rotations de $\mathbb{R}^n$.

La version fonctionnelle de cette proposition est :

$$\text{si } f \in \mathscr{O}(E), \text{ alors } \det f = \pm 1.$$

§ 1. ***Dans le plan orienté.–*** Nous noterons pour tout réel x :

$$R_x = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \text{ et } S_x = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}.$$

Ces deux types de matrices appartiennent à $\mathscr{O}_2$, et le décrivent entièrement :

Théorème VII.2 (*Description de $\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$*)

Soit $\Omega \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$
- *Si $\det \Omega = 1$, alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Omega = R_\theta$.*
- *Si $\det \Omega = -1$, alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Omega = S_\theta$.*

Propriétés VII.3 (*des réflexions*)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
- *S_x est la réflexion par rapport à Vect $\begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} \end{pmatrix}$.*
- *S_x est orthogonalement semblable à la matrice Diag$(1, -1)$.*

Le cas des rotations est plus connu :

Propriétés VII.4 (*des rotations*)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
- *R_x est la rotation vectorielle de centre 0 et d'angle x.*
- *$\forall x, y \in \mathbb{R}, R_x \times R_y = R_{x+y}$ et $R_x^{-1} \times R_y \times R_x = R_y$.*

De ces trois résultats, on déduit le théorème suivant :

Théorème VII.5 (*Réduction de $\mathscr{O}_2(E)$*)

Soit E un plan euclidien orienté et $f \in \mathscr{O}(E)$.
- *Si $\det f = 1$, alors*
  1. *$\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute BOND $\mathscr{B}$ de E, Mat$_{\mathscr{B}}(f) = R_\theta$.*
  2. *Pour tout vecteur unitaire $u \in E$, $\begin{cases} \cos\theta = < u, f(u) > \\ \sin\theta = \det(u, f(u)) \end{cases}$*
- *Si $\det f = -1$, alors*
  1. *Il existe une BON **directe** $\mathscr{B}$ de E dans laquelle Mat$_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*
  2. *Pour tout BON **directe** $\mathscr{B}$ de E, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que Mat$_{\mathscr{B}}(f) = S_\theta$.*

Enfin, le produit de deux réflexions est une rotation, et la réciproque est vraie.

§ 2. ***Dans l'espace orienté.–*** Le cas de la dimension 3 est légèrement plus délicat à étudier que celui de la dimension 2 car les éléments caractéristiques d'une rotation par exemple n'apparaissent pas du premier coup d'oeil. Conformément au programme, nous ne nous intéresserons qu'aux rotations, i.e aux isométries vectorielles qui conservent l'orientation.

On rappelle que E est un espace euclidien orienté de dimension 3, et que $\mathrm{SO}_3(E)$ est l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E de déterminant 1.

Proposition VII.6 (*Réduction de $\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$*)

Soit $f \in \mathrm{SO}_3(E)$. Alors il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et un réel θ tels que

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Une telle isométrie est appelée rotation de demi-axe $\mathbb{R}_+\overrightarrow{e_1}$ et d'angle θ, et notée $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{e_1},\theta}$.
Si $\theta = \pi$, on dit de f que c'est un retournement, ou un demi-tour.

REMARQUES :

1. Pratiquement, les éléments caractéristiques de cette rotation se retrouvent grâce à :
   - $\overrightarrow{e_1} \in \ker(f - \mathrm{Id})$.
   - Trace $(f) = 1 + 2\cos\theta$,
   - Pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ **orthogonal** à $\overrightarrow{e_1}$, $\sin\theta = \det\left(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{e_1}\right)$.
2. Une symétrie orthogonale est une isométrie, mais c'est un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\ker(f + \mathrm{Id})$ est de dimension paire (réduire cette matrice dans une base adaptee pour calculer son déterminant) i.e $\iff f = \mathrm{Id}$ ou f est un retournement.

§ 3. ***Le cas général.–*** Le théorème principal est basé sur plusieurs lemmes, dont les résultats et les preuves doivent être sus, que je regroupe dans une proposition :

Propriétés VII.7

Soit f une isométrie de E.

(i) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est également stable par f.

(ii) Les seules valeurs propres réelles possibles de f sont 1 ou -1.

(iii) Il existe des sous-espaces vectoriels $P_1, \dots, P_r$ stables par f, de dimension $\leqslant 2$, orthogonaux deux à deux, et tels que $E = \oplus P_i$.

On en déduit le théorème suivant de réduction de $\mathscr{O}_n$. Nous notons encore R_θ la matrice de rotation d'angle θ.

Théorème VII.8 (*Réduction de $\mathscr{O}_n$*)

Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. Il existe trois entiers naturels p, q, r tels que $p + q + 2r = n$, r réels $\theta_1, \dots, \theta_r \in]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$, et une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & R_{\theta_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & R_{\theta_r} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $u \in SO(E) \iff q$ est pair.
Matriciellement, cela signifie que toute matrice $M \in \mathscr{O}_n$ est orthogonalement semblable à une matrice de ce type.

VIII ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

§ 1. ***$\mathscr{S}(E)$ et $\mathscr{S}_n$.–*** Nous définissons ici un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ constitué d'endomorphismes diagonalisables.

Définition VIII.1

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit symétrique lorsque

$$\forall x, y \in E, \qquad < f(x), y > = < x, f(y) > .$$

Nous en avons vu des exemples dans $\mathbb{R}[X]$. Matriciellement, il y a aussi les affinités orthogonales, que l'on peut définir comme les matrices qui diagonalisent dans une BON.

Proposition VIII.2

Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormée**, *et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est symétrique } \iff f \text{ est symétrique.}$$

§ 2. ***Projecteurs orthogonaux.–*** On peut en déduire une nouvelle caractérisation des projecteurs orthogonaux dans l'ensemble des projecteurs. Nous regroupons toutes les caractérisations à connaitre dans la proposition suivante.

Proposition VIII.3

Soit f un projecteur de l'espace euclidien E. On a équivalence entre :

(i) f est un projecteur orthogonal.

(ii) f est un endomorphisme symétrique.

(iii) $\ker f \perp \text{Im } f$.

(iv) Pour tout $x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

(v) La matrice de f dans toute BON est symétrique.

§ 3. ***Réduction de $\mathscr{S}(E)$.–*** Ils partagent avec les endomorphismes orthogonaux une propriété de stabilité :

Lemme 1 (*Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable*)

Si f est un endomorphisme symétrique de E et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Théorème VIII.4 (*Spectral*)

Soit f un endomorphisme symétrique de E. Alors il existe une BON de E formée de vecteurs propres de E.

De manière équivalente, f diagonalise en base orthonormale. Ou encore, E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f. Géométriquement, les endomorphismes symétriques sont les affinités orthogonales.

Théorème VIII.5

Si $S \in S_n$, il existe D diagonale et $\Omega \in \mathscr{O}_n$ telles que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Remarques :

A toute matrice $M \in \mathscr{M}_n$, on peut associer des matrices symétriques dont les éléments propres contiennent des informations utiles sur M, par exemple $S_1 = {}^tMM, S_2 = M{}^tM, S_3 = M +^t M$. On peut entre autres prouver que pour tout $M \in GL_n$, il existe une BON dont l'image par M est orthogonale.

§ 4. ***Compléments.–*** Ces résultats ne sont pas au programme, mais je serais surpris qu'aucun sujet n'en parle.

Proposition VIII.6

Soi $S \in S_n$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!], Se_k = \lambda_k e_k$.

(i) Soit $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$. Alors, $< SX, X >= \sum_{k=1}^n \lambda_i x_i^2$.

(ii) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 \|X\|^2 \leqslant < SX, X > \leqslant \lambda_n \|X\|^2$.

Définition VIII.7

Soit $M \in S_n$ une matrice symétrique. M est dite :

(i) **positive** *lorsque pour tout $X \in \mathbb{R}^n, < SX, X > \in \mathbb{R}_+$.*

(ii) **définie positive** *lorsque pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, $< SX, X > \in]0, +\infty[$.*

Géométriquement, cela signifie que l'angle entre un vecteur et son image est toujours aigu.

Proposition VIII.8 (*Caractérisation spectrale de la positivité*)

Soit $M \in S_n$ une matrice symétrique.

(i) M est positive $\iff$ toutes ses valeurs propres sont positives.

(ii) M est définie positive $\iff$ toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

IX Figures imposées

Exercices :

CCP 80 Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercices :

CCP 78 Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercices :

CCP 92 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

Exercices :

CCP 93
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté par la base orthonormée (i, j, k).
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (i, j, k) est $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Prouver que f est un endomorphisme orthogonal.
   (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f.
2. En déduire la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.